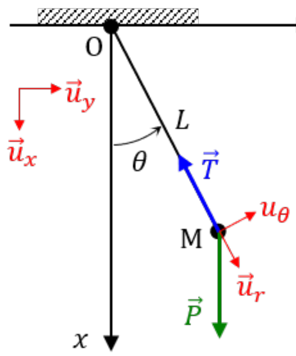
[M] TP n°3 – Pendule simple

Dans ce TP, nous allons dans un premier temps déterminer la valeur du champ de pesanteur à l'aide d'un pendule simple. Dans un second temps, nous allons apprendre à résoudre numériquement une équation différentielle d'ordre 2.

I) Mesure du champ de pesanteur

1) Rappels théoriques

On considère un pendule simple : une masse m supposée ponctuelle est attachée à l'extrémité d'un fil de longueur L et de masse négligeable. On note $\mathcal{R} = (\mathrm{O}, \overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_y})$ le référentiel terrestre supposé galiléen et $\mathcal{B} = (\mathrm{O}, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta})$ la base polaire dans laquelle seront projetés les différents vecteurs.



Le PFD appliqué à la masse m dans $\mathcal{R}$ et projeté sur $\overrightarrow{u_\theta}$ donne :

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin(\theta) = 0 \quad \text{avec :} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{L}}$$

Aux petits angles, on obtient l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique :

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2\, \theta(t) = 0$$

2) Mesure de l'accélération de pesanteur

L'accélération de pesanteur g est reliée à la période propre T_0 du pendule par la relation : $\boxed{g = \dfrac{4\pi^2 L}{T_0^2}}$

L'objectif de cette partie est de mesurer la période T_0 d'oscillation d'un pendule de longueur L pour en déduire la valeur de g, tout en minimisant les incertitudes de mesure.

- Justifier que l'incertitude-type de g vaut :

$$u(g) = g\sqrt{\left(\frac{u(L)}{L}\right)^2 + 2\left(\frac{u(T_0)}{T_0}\right)^2}$$

- Quelles précautions expérimentales peut-on prendre afin de minimiser $u(g)$?

- Réaliser une mesure de g et estimer $u(g)$.

- Calculer l'écart normalisé entre votre valeur et celle d'un autre binôme. Les mesures sont-elles compatibles ?

II) Conservation de l'énergie mécanique

1) Pointage vidéo

Par soucis de temps, un pointage vidéo d'une dizaine d'oscillations d'un pendule a été réalisé en amont. Un fichier Python contient la position du pendule (x, y) – avec les notations de la figure précédente – en fonction du temps t. L'expérience a été réalisée avec : $m = 200$ g et $L = 15$ cm.

- Quel est le lien entre θ, x et y ? Compléter le code en conséquence et visualiser graphiquement $\theta(t)$.

2) Dérivée numérique

On souhaite obtenir numériquement la vitesse angulaire $\omega(t)$.

$$\omega(t) = \frac{d\theta}{dt} = \frac{\theta(t+dt) - \theta(t)}{(t+dt) - (t)} \quad \underset{\text{Discrétisation}}{\Rightarrow} \quad \omega[n] = \frac{\theta[n+1] - \theta[n]}{t[n+1] - t[n]}$$

Cette relation permet de calculer numériquement la dérivée $\omega[n]$, connaissant $\theta[n]$, $\theta[n+1]$, $t[n]$ et $t[n+1]$. On appelle N l'indice du dernier élément de θ et t. Attention, cette méthode ne permet pas de calculer $\omega[N]$ puisque $\theta[N+1]$ et $t[N+1]$ ne sont, par définition de N, pas définis.

Dans l'optique de travailler avec des listes qui font toutes la même taille, on pourra simplement ajouter une $N^{\text{ième}}$ valeur à la liste identique à la précédente : $\omega[N] = \omega[N-1]$.

- 💻 Écrire une fonction `derivee(t, s)`, qui prend en argument deux arrays `t` et `s` et qui renvoie la dérivée de `s` par rapport à `t`.

- 💻 Visualiser graphiquement $\omega(t)$. Expliquer pourquoi $\omega(t)$ est « bruité ».

3) Énergies

- 💻 Calculer numériquement l'énergie potentielle de pesanteur $\mathcal{E}_p$ en choisissant la constante telle que $\mathcal{E}(x = L) = 0$, l'énergie cinétique $\mathcal{E}_c$ puis l'énergie mécanique $\mathcal{E}_m$.

- 💻 Tracer ces trois énergies en fonction du temps. Conclure.

III) Pendule simple aux grands angles

Il est possible de transformer l'équation différentielle d'ordre 2 portant sur la variable θ en deux équations différentielles couplées d'ordre 1 portant sur les variables θ et ω. En effet,

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin(\theta) = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{d\theta}{dt} = \omega \\ \dfrac{d\omega}{dt} = -\omega_0^2 \sin(\theta) \end{cases}$$

Ainsi, en introduisant la liste $Y = [\theta, \omega]$, alors on en déduit :

$$\frac{dY}{dt} = \Big[Y[1] \, , -\omega_0^2 \sin(Y[0]) \Big]$$

- 💻 Résoudre l'équation différentielle du pendule simple à l'aide de la fonction `odeint`. Prendre pour conditions initiales $\theta(0) = \theta_0$ au choix et $\omega(0) = 0$. Tracer la courbe sur un temps égal à $10T_0$.

- 💻 Superposer la solution obtenue avec la solution issue de l'approximation harmonique : $\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega_0 t)$. Constater les différences aux grands angles en augmentant progressivement θ_0 jusqu'à la valeur de 179°.

Aides pour Python

`len(u)` renvoie la taille de la liste `u`.

`range(N)` renvoie une liste d'entiers de `0` à `N-1`.

`u.append(a)` ajoute l'élément `a` à la fin de la liste `u`.

`u[-1]` renvoie le dernier élément de la liste `u`.

`np.linspace(a, b, N)` crée un array de `N` valeurs linéairement espacées entre `a` et `b`.

`odeint(deriv, CI, t)` renvoie la solution de l'équation différentielle donnée par la fonction `deriv`, avec pour condition initiale `CI`, et évaluée aux temps `t`.

`np.cos(x)` renvoient le cosinus de l'angle `x` exprimé en radians. Faire de même pour `sin`, `tan`, `arctan`, etc.

`plt.plot(x, y, 'b-')` trace `y` en fonction de `x` avec un trait `'-'` bleu `'b'`. Il est possible de changer la couleur : rouge `'r'`, vert `'g'`, noir `'k'` et de remplacer le trait `'-'` par un trait pointillé `'--'` ou par un nuage de points `'o'`.